23/10/2015

Παραδειγμα: Να βρεθουν όλες οι κανονικες καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ των οποιων όλες οι εφαπτόμενες ευθείες ισαπεχουν απο σταθερό σημειο.

Λύση:

$$d(0,\ell) = d(0,P_1) = |\vec{OP_0}||\cos\varphi| = |\langle \vec{OP}, \vec{n} \rangle|$$

$\langle c(s), \vec{n} \rangle =$ σταθερό $\forall s \in I$

Παραγωγίζουμε: $\langle \ddot{c}(s), \vec{n}(s) \rangle + \langle c(s), \dot{\vec{n}}(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle \vec{t}(s), \vec{n}(s) \rangle + \langle c(s), -k(s)\vec{t}(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -k(s) \langle c(s), \vec{t}(s) \rangle = 0 \quad \forall s \in I$ (1)

Εστω ότι υπαρχει s_0: $k(s_0) \neq 0 \Rightarrow k(s) \neq 0 \ \forall s \in (s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)$.

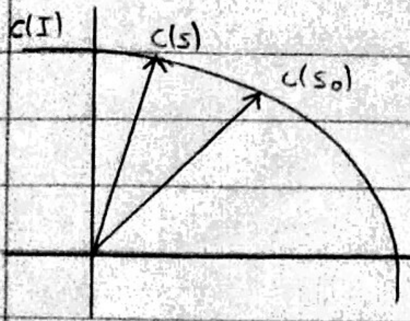
Η (1) στο $(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)$ δινει: $\langle c(s), \vec{t}(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle c(s), \dot{c}(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2} \langle c(s), c(s) \rangle\right) = 0 \Leftrightarrow \langle c(s), c(s) \rangle =$ σταθερό στο $(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)$.

Άρα το κομματι $c(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)$ ειναι τοξο κυκλου με κεντρο το $(0,0)$. Έστω τώρα $k(s)=0 \ \forall s \in I \Rightarrow$ Η c ευθεια και έτσι στην πρώτη περίπτωση $k|(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon) =$ σταθ. Λογω συνεχειας η k είναι σταθερή στο I, επομενως η καμπυλη είναι τμήμα ευθείας ή τοξο κύκλου.

Παραδειγμα: Έστω $c(s)$ καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ με $s =$ μηκος τόξου, $s \in I$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $s_0 \in I$ με την ιδιότητα: $d(0, c(s_0)) = \max d(0, c(s))$.
Τότε ισχύει ότι $|k(s_0)| \geq \frac{1}{d(0,c(s_0))}$.

Λύση:



Θεωρουμε τη συναρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ ώστε:
$f(s) = \frac{1}{2} d(0,c(s))^2 = \frac{1}{2} \langle c(s), c(s) \rangle$. Η f είναι λεια και παρουσιαζει ολικο μεγιστο στο $s_0 \in I$.

$\dot{f}(s_0) = 0$ & $\ddot{f}(s_0) \leq 0$

$f(s) = \frac{1}{2} \langle c(s), c(s) \rangle$

$\dot{f}(s) = \langle c(s), \dot{c}(s) \rangle = \langle c(s), \vec{t}(s) \rangle$

$\ddot{f}(s) = \langle \dot{c}(s), \vec{t}(s) \rangle + \langle c(s), \dot{\vec{t}}(s) \rangle = \langle \vec{t}(s), \vec{t}(s) \rangle + \langle c(s), k\vec{n}(s) \rangle$

$\ddot{f}(s) = 1 + k(s) \langle c(s), \vec{n}(s) \rangle$.

$\dot{f}(s_0) = 0 \Leftrightarrow \langle c(s_0), \vec{t}(s_0) \rangle = 0 \Rightarrow \vec{n}(s_0) = \pm \frac{c(s_0)}{\|c(s_0)\|}$

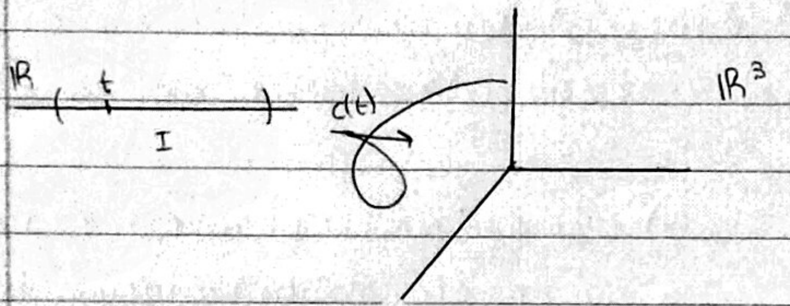
$\ddot{P}(s_0) \leq 0 \iff \langle 1 + k(s_0) c(s_0), \vec{n}(s_0) \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle 1 + k(s_0) c(s_0), \pm \frac{c(s_0)}{\|c(s_0)\|} \rangle \leq 0 \iff$

$\iff 1 \pm k(s_0) \|c(s_0)\| \leq 0 \Rightarrow 1 \pm k(s_0) d(0, c(s_0)) \leq 0 \Rightarrow \pm k(s_0) d(0, c(s_0)) \leq -1$

$\Rightarrow |k(s_0)| \geq \dfrac{1}{d(0, c(s_0))}$

Καμπύλες του $\mathbb{R}^3$:

Ορισμος: Μια λεια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ είναι μια απεικόνιση $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ τύπου $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$, με $x(t), y(t), z(t)$ λείες.



Ορισμος: Το διανυσμα $c'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ καλειται εφαπτόμενικό διάνυσμα ή διανυσμα ταχύτητας της c στο t_0. Αν $c'(t_0) \neq 0$ τοτε ορίζεται ευθεία που περνά απο το $c(t_0)$ και είναι $\parallel c'(t_0)$ η οποία καλείται εφαπτομενη της c στο t.

Ορισμος: Η c καλειται κανονικη αν-ν $c'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$.

Μηκος τοξου: $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|c'(\sigma)\| d\sigma$

Αναπαραμετρηση: Όπως στον $\mathbb{R}^2$.
Μηκος καμπύλης: $L_a^b = \displaystyle\int_a^b \|c'(t)\| dt$.

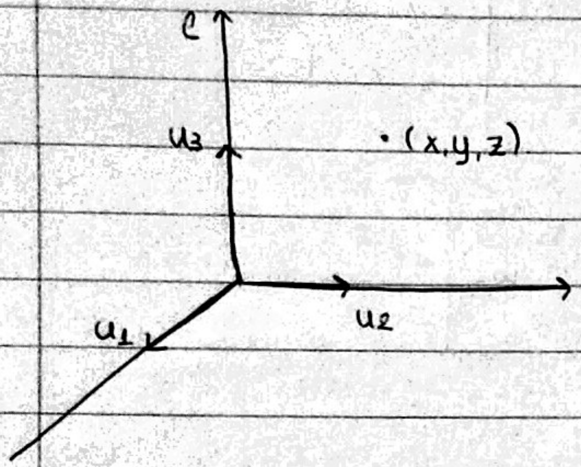
Καθε κανονική καμπυλη του $\mathbb{R}^2$ δεχεται μια αναπαραμετρησή με το μηκος τοξου. Η c εχει παραμετρο το μηκος τοξου $\iff \|c'(t)\| = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Ορισμος: Δυο καμπυλες $c, \tilde{c} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καλουνται γεωμετρικως ισότιμες αν_ν υπαρχει $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ και $\tilde{c} = T \circ c$.

Ταξινόμηση: Καθε $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ γραφεται ως $T = T_v \circ A$, $A \in O(3)$

$O(3) = ;$

→ $\{u_1, u_2, u_3\}$ ορθομοναδιαία ορθογωνια βαση του $\mathbb{R}^3$.



Η στροφη κατα γωνια θ ως προς τον αξονα ℓ $/\!/ u_3$ είναι ο γραμμικος μετασχηματισμος του $\mathbb{R}^3$ με πινακα $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ως προς $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Συμπερασμα: Οι στροφες ως προς αξονα είναι ορθογωνιοι μετασχ. που διατηρουν τον προσανατολισμο.

→ Θεωρουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό του $\mathbb{R}^3$ με πινακα
$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ως προς τη βαση $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Είναι ορθογώνιος μετασχηματισμος που αντιστρεφει τον προσανατολισμο: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \underset{\text{στροφή}}{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\text{κατοπτρισμος}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \right\} \text{ψευδοστροφες}$$

Θεώρημα: Κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^3$ είναι η στροφή ως προς άξονα η ψευδοστροφή.

$T = T_v \circ A$, A γραμμικό μέρος της $T = T_*$

Εξωτερικό-μικτό γινόμενο:

→ $u, w \in \mathbb{R}^3$ $\quad v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

→ $[v, w, z] = \langle v \times w, z \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$

$$A(u \times w) = \pm Au \times Aw \qquad \begin{cases} + \text{ αν } \det A = +1 \\ - \text{ αν } \det A = -1 \end{cases}$$
$$[Au, Aw, Az] = \pm [u, w, z]$$

Καμπυλότητα καμπυλών του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο:

$$\left(\begin{array}{l} c: I \to \mathbb{R}^2. \quad k = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle = \langle \ddot{c}, \vec{n} \rangle \\ |k| = \|\ddot{c}\| \end{array} \right)$$

Ορισμός: Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με φυσική παράμετρο s. Καλούμε καμπύλη της c τη συνάρτηση: $k: I \to [0, +\infty)$ με $k(s) = \|\ddot{c}(s)\|$.

→ $k(s) = 0 \ \forall s \in I \Leftrightarrow \|\ddot{c}\| = 0 \ \forall s \Leftrightarrow \ddot{c}(s) = 0 \Leftrightarrow \dot{c}(s) = v =$ σταθ. μον. διανυσμ.
$\Rightarrow c(s) = p_0 + su$.
Άρα η μοναδικές καμπύλες που έχουν καμπυλότητα ίση με μηδέν είναι οι ευθείες.

Το $\mathbb{R}^2$ ανηκει στον $\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}^2 \cong \{(x,y,0) : x,y\in\mathbb{R}\}$

$c(s) = (x(s), y(s), 0)$

Τοτε $\underset{\text{του } \mathbb{R}^3}{k_{\text{ως καμπύλη}}} = \left| \underset{\text{του } \mathbb{R}^2}{k_{\text{ως καμπύλη}}}\right|$.

→ Ειναι γεωμετρική έννοια;

$\tilde{c} = T\circ c$. Η c έχει παραμετρο το μηκος τοξου.

$\tilde{c}' = T_* c' = T_*\dot{c} \Rightarrow \|\tilde{c}'\| = \|T_* c'\| = \|T_*\dot{c}\| = \|\dot{c}\| = 1$

$\Rightarrow s$ μηκος τοξου και για τη $\tilde{c}$.

$k = \|\ddot{c}\|$, $\tilde{k} = \|\ddot{\tilde{c}}\|$

$\dot{\tilde{c}} = T_*\dot{c} \Rightarrow \ddot{\tilde{c}} = T_*\ddot{c} = \|\ddot{c}\| \Rightarrow \tilde{k} = k$.

Καμπυλοτητα του $\mathbb{R}^3$ με τυχαια παραμετρο:

Έστω $c: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ καμπύλη κανονική με παραμετρο t.

$s = \int_{t_0}^{t} \|c'(\sigma)\|d\sigma \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \|c'\|>0$, $s = s(t)$.

$t = t(s) = \beta(s)$ $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|c'\|}$.

Η $\bar{c} = c\circ\beta$ είναι η αναπαραμετρηση της c με μηκος τοξου. Εχει καμπυλότητα $\bar{k} = \left\|\frac{d^2}{ds}\bar{c}\right\|$.

Ορισμος: Ονομαζουμε καμπυλοτητα της $c: I\to\mathbb{R}^3$ τη συναρτηση $k: I\to[0,+\infty)$ με $k(t) = \bar{k}(s(t))$.

$\bar{c} = c\circ\beta = c$, $k = \|\ddot{c}\|$

$\dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dc}{dt} \Rightarrow \boxed{\dot{c} = \frac{dt}{ds}c'}$

$\ddot{c} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right)c' + \frac{dt}{ds}\frac{d}{ds}c' = \frac{d^2t}{ds^2}c' + \frac{dt}{ds}\frac{dt}{ds}\frac{dc'}{dt} \Rightarrow \boxed{\ddot{c} = \frac{d^2t}{ds^2}c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c''}$

$\langle\dot{c},\dot{c}\rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \dot{c},\ddot{c}\rangle = 0 \Rightarrow \dot{c}\perp\ddot{c} \Rightarrow \|\dot{c}\times\ddot{c}\| = \|\dot{c}\|\|\ddot{c}\|\sin\frac{\pi}{2} = \|\ddot{c}\|$

$\dot{c}\times\ddot{c} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c'\times c'' \Rightarrow \dot{c}\times\ddot{c} = \frac{c'\times c''}{\|c'\|^3}$. Σε τυχουσα παραμετρο $\boxed{k = \frac{\|c'\times c''\|}{\|c'\|^3}}$

παραδειγμα: Θεωρουμε την καμπυλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$
$a>0$, $b \in \mathbb{R}$.

Η c ειναι λεια με διανυσμα ταχυτητας $c'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$
$\|c'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ η c είναι κανονικη με καμπυλοτητα $k = \dfrac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} = \dots = \dfrac{a}{a^2+b^2} =$ σταθερή >0.

Ορισμος: Εστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ καμπυλη με φυσική παραμετρο s καλού-με καμπυλότητα της c τη συναρτηση $k: I \to [0, +\infty)$ με $k(s) = \|\ddot{c}(s)\|$

Μηκος τοξου με αφετηρια $t_0 = 0$ είναι:

$$s = \int_0^t \|c'\| = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow s = t\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Η αναπαραμετρηση είναι $c(s) = \left(a\cos \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$

Πλαισιο Frenet για καμπυλες του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παραμετρο:

Έστω $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπυλη με παραμετρο το μηκος τοξου s.
Το μοναδιαιο εφαπτομενο είναι:

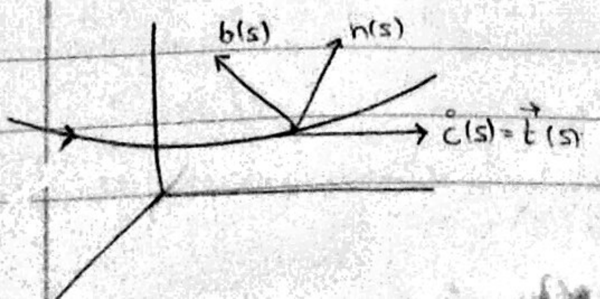
$$\vec{t}(s) = \dot{c}(s).$$

$$\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \dot{c}, \ddot{c} \rangle = 0 \Rightarrow \ddot{c} \perp \dot{c}.$$

ΥΠΟΘΕΣΗ: $k(s) > 0 \quad \forall s \in I$.

Ορισμος: Για καμπυλες με παντου θετική καμπυλότητα οριζουμε το κυριο καθετο ως το μοναδιαιο $\vec{n}(s) = \dfrac{\ddot{c}(s)}{\|\ddot{c}(s)\|} = \dfrac{\ddot{c}(s)}{k(s)}$.

Το δευτερο καθετο διανυσμα είναι το μοναδιαιο διανυσμα
$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$



$$\vec{u} = \langle u, u_1\rangle u_1 + \langle u, u_2\rangle u_2 + \langle u, u_3\rangle u_3$$

Πως μεταβάλλεται το πλαίσιο Frenet;

$\dot{\vec{t}} = \ddot{c} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{t}} = k\vec{n}}$ 1η εξίσωση Frenet

$\dot{\vec{n}} = \langle \dot{\vec{n}}, \vec{t}\rangle \vec{t} + \cancel{\langle \dot{\vec{n}}, \vec{n}\rangle}^{0} \vec{n} + \langle \dot{\vec{n}}, \vec{b}\rangle \vec{b}$

- $\langle \vec{n}, \vec{n}\rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \dot{\vec{n}}, \vec{n}\rangle = 0$
- $\langle \vec{n}, \vec{t}\rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{n}}, \vec{t}\rangle + \langle \vec{n}, \dot{\vec{t}}\rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{n}}, t\rangle = -k$

Άρα προκύπτει η σχέση: $\boxed{\dot{\vec{n}} = -k\vec{t} + \tau \vec{b}}$ όπου $\tau = \langle \dot{\vec{n}}, b\rangle$

$\dot{\vec{b}} = \cancel{\langle \dot{\vec{b}}, \vec{t}\rangle} t + \langle \dot{\vec{b}}, \vec{n}\rangle n + \cancel{\langle \dot{\vec{b}}, \vec{b}\rangle} \vec{b}$

- $\langle \vec{b}, \vec{b}\rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \dot{\vec{b}}, \vec{b}\rangle = 0$
- $\langle \vec{b}, \vec{t}\rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{b}}, \vec{t}\rangle + \langle \vec{b}, \underbrace{\dot{\vec{t}}}_{= kn}\rangle = 0$
- $\langle \vec{b}, \vec{n}\rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{b}}, \vec{n}\rangle + \langle \vec{b}, \dot{\vec{n}}\rangle = 0$

Άρα συνολικά έχουμε:

$\dot{\vec{t}} = k\vec{n}$ 1η εξίσωση Frenet

$\dot{\vec{n}} = -kt + \tau b$, $\tau = \langle \dot{\vec{n}}, \vec{b}\rangle$

$\dot{\vec{b}} = -\tau \vec{n}$ στρέψη της c